Індивідуальне завдання №7

**Метод Гауса – Зейделя**

Ітераційний процес цього методу відрізняється від методу простої ітерації тим, що при численному рішенні системи = B, обчислення (k+1)го наближення при i>1 використовуються вже раніше обчислені (k+1) наближення невідомих , , … , , та k-і наближення невідомих , , … ,.

Розглянемо систему:

(1)

Припустимо, що , , ≠0.

Отримаємо систему у вигляді:

(2)

Візьмемо деякі наближення та підставимо його у (2) таким чином, що

(3)

Обчисленням закінчується перша ітерація. У результаті отримаємо , , . В загальному випадку k-е наближення визначається через формули:

(4)

Даний метод відомий як ітераційний метод Гауса-Зейделя. Варто зауважити, що області збіжності методу простих ітерацій та методу Гауса-Зейделя розбіжні, тобто може виявитися, що для деяких систем метод Гауса-Зейделя збігається, а для методу простих ітерацій є розбіжним, та навпаки. При виконанні:

i = (, метод збігається.

Алгоритм численного рішення СЛАР методом Гауса-Зейделя:

1. Перевіримо чи виконується умова діагонального переважання.   
   Якщо ця умова виконується для усіх строк матриці, то обчислюємо елементи матриці B:

і , ,

1. Якщо умова діагонального переважання не виконується, то необхідно привести систему до вигляду зручного для ітерацій.
2. Обчислити норму матриці B:

Якщо , значить, що ітераційний процес збігається.

1. Оберемо у якості начального наближення
2. Представимо ітераційний процес у вигляді (4) та реалізуємо його k-раз.

**Початкова система:**

Приведемо систему рівнянь до діагонального панування

ε = 0.001

Наближений xi:

[0.2542372881355932, -0.3333333333333333, -1.1518987341772151]

Ітерація #1

X1 = 0.254 - (0.034 \* -0.333) - (0.593 \* -1.152) = 0.949

X2 = -0.333 - (0.667 \* 0.949) - (-0.067 \* -1.152) = -1.043

X3 = -1.152 - (0.038 \* 0.949) - (-0.633 \* -1.043) = -1.848

Ітерація #2

X1 = 0.254 - (0.034 \* -1.043) - (0.593 \* -1.848) = 1.386

X2 = -0.333 - (0.667 \* 1.386) - (-0.067 \* -1.848) = -1.38

X3 = -1.152 - (0.038 \* 1.386) - (-0.633 \* -1.38) = -2.078

Ітерація #3

X1 = 0.254 - (0.034 \* -1.38) - (0.593 \* -2.078) = 1.534

X2 = -0.333 - (0.667 \* 1.534) - (-0.067 \* -2.078) = -1.494

X3 = -1.152 - (0.038 \* 1.534) - (-0.633 \* -1.494) = -2.156

Ітерація #4

X1 = 0.254 - (0.034 \* -1.494) - (0.593 \* -2.156) = 1.584

X2 = -0.333 - (0.667 \* 1.584) - (-0.067 \* -2.156) = -1.533

X3 = -1.152 - (0.038 \* 1.584) - (-0.633 \* -1.533) = -2.182

Ітерація #5

X1 = 0.254 - (0.034 \* -1.533) - (0.593 \* -2.182) = 1.601

X2 = -0.333 - (0.667 \* 1.601) - (-0.067 \* -2.182) = -1.546

X3 = -1.152 - (0.038 \* 1.601) - (-0.633 \* -1.546) = -2.191

Ітерація #6

X1 = 0.254 - (0.034 \* -1.546) - (0.593 \* -2.191) = 1.606

X2 = -0.333 - (0.667 \* 1.606) - (-0.067 \* -2.191) = -1.55

X3 = -1.152 - (0.038 \* 1.606) - (-0.633 \* -1.55) = -2.194

Ітерація #7

X1 = 0.254 - (0.034 \* -1.55) - (0.593 \* -2.194) = 1.608

X2 = -0.333 - (0.667 \* 1.608) - (-0.067 \* -2.194) = -1.552

X3 = -1.152 - (0.038 \* 1.608) - (-0.633 \* -1.552) = -2.195

Ітерація #8

X1 = 0.254 - (0.034 \* -1.552) - (0.593 \* -2.195) = 1.609

X2 = -0.333 - (0.667 \* 1.609) - (-0.067 \* -2.195) = -1.552

X3 = -1.152 - (0.038 \* 1.609) - (-0.633 \* -1.552) = -2.196

Ітерація #9

X1 = 0.254 - (0.034 \* -1.552) - (0.593 \* -2.196) = 1.609

X2 = -0.333 - (0.667 \* 1.609) - (-0.067 \* -2.196) = -1.553

X3 = -1.152 - (0.038 \* 1.609) - (-0.633 \* -1.553) = -2.196

Ітерація #10

X1 = 0.254 - (0.034 \* -1.553) - (0.593 \* -2.196) = 1.609

X2 = -0.333 - (0.667 \* 1.609) - (-0.067 \* -2.196) = -1.553

X3 = -1.152 - (0.038 \* 1.609) - (-0.633 \* -1.553) = -2.196

**Протокол розв’язку в MathLab:**

A=[3.8 4.1 -2.3;

-2.1 3.9 -5.8;

1.8 1.1 -2.1];

B=[4.8; 3.3; 5.8];

disp("Початкова система")

x = [A B] ;

disp(x);

a=[5.9 0.2 3.5;

2 3 -0.2;

-0.3 5 -7.9];

b=[1.5; -1; 9.1];

disp("Система рівнянь приведена до діагонального панування ")

D = [a b];

disp(D);

n = 3;

e = 0.001;

x = zeros(1, n);

cmp = false;

k = 0;

while cmp == false

for i = 1 : n

sum = 0;

for j = 1 : n

if (j ~= i)

sum = sum + a(i,j) \* x(j);

end

end

temp(i) = x(i);

x(i) = (b(i) - sum) / a(i,i);

end

for i = 1 : n

if abs(x(i) - temp(i)) >= e

break;

end

end

if i == n

cmp = true;

end

k = k + 1;

disp("Ітерація №")

disp(k)

disp("Проміжне значення матриці")

disp(x)

end

disp("Результат")

disp("x1 = ")

disp(x(1))

disp("x2 = ")

disp(x(2))

disp("x3 = ")

disp(x(3))

**Виведення в консолі:**

Початкова система

3.8000 4.1000 -2.3000 4.8000

-2.1000 3.9000 -5.8000 3.3000

1.8000 1.1000 -2.1000 5.8000

Система рівнянь приведена до діагонального панування

5.9000 0.2000 3.5000 1.5000

2.0000 3.0000 -0.2000 -1.0000

-0.3000 5.0000 -7.9000 9.1000

Ітерація №1

Проміжне значення матриці

0.2542 -0.5028 -1.4798

Ітерація №2

Проміжне значення матриці

1.1491 -1.1981 -1.9538

Ітерація №3

Проміжне значення матриці

1.4539 -1.4328 -2.1140

Ітерація №4

Проміжне значення матриці

1.5569 -1.5122 -2.1681

Ітерація №5

Проміжне значення матриці

1.5917 -1.5390 -2.1864

Ітерація №6

Проміжне значення матриці

1.6034 -1.5480 -2.1926

Ітерація №7

Проміжне значення матриці

1.6074 -1.5511 -2.1946

Ітерація №8

Проміжне значення матриці

1.6087 -1.5521 -2.1953

Ітерація №9

Проміжне значення матриці

1.6092 -1.5525 -2.1956

Результат

x1 = 1.6092

x2 = -1.5525

x3 = -2.1956

**Висновок:**

Можна помітити, що при знаходженні відповідей рішення системи є невеликі розбіжності, тому що рахуючи вручну ми використовуємо ε = 0,001 (припустиме наближення).

Література:

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. Пособие для вузов М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.

2. Методи обчислень: навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичного факультету / Б.М. Ляшенко, О.М. Кривонос, Т.А. Вакалюк.- Житомир Вид-во ЖДУ ім. І. Франка 2014. – 224с. (Укр.мов.) ст. 31 -32

3. Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Х.: Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с. (Укр. мов.) ст 37